4. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 03.05.2007)

Aufgabe P7 *Bosonische und fermionische Statistik*

Zwei nicht-wechselwirkende identische Teilchen mit den Koordinaten x_1 und x_2 besetzen die zwei niedrigsten Energie-Niveaus in einem eindimensionalen quadratischen Potential, $V = \frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2)$. Was ist der Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ für den Fall, daß die Teilchen Bosonen sind? Und für Fermionen? Was wäre das Resultat für unterscheidbare Teilchen?

Aufgabe P8 *Parastatistik*

Sie haben in der Vorlesung die 3-Teilchen-Zustände kennengelernt, die sich unter Permutationen mit der irreduziblen "2"-Darstellung der symmetrischen Gruppe S_3 transformieren:

$$\begin{aligned}
|\Psi_+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|mnp\rangle + \omega\,|npm\rangle + \bar{\omega}\,|pmn\rangle\Big)\\
|\Psi_-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|nmp\rangle + \omega\,|pnm\rangle + \bar{\omega}\,|mpn\rangle\Big)\\
|\Phi_+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|nmp\rangle + \bar{\omega}\,|pnm\rangle + \omega\,|mpn\rangle\Big)\\
|\Phi_-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|mnp\rangle + \bar{\omega}\,|npm\rangle + \omega\,|pmn\rangle\Big)
\end{aligned}$$

mit $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = (-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$ und $\bar{\omega} = \omega^2 = \omega^{-1} = (-1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2$.

a) Zeigen Sie, daß diese Zustände normiert und orthogonal zueinander sind, sowie auch orthogonal zu den Boson- und Fermionzuständen. Es soll hier genügen, wenn Sie jeweils ein Beispiel berechnen.

b) Überlegen Sie sich das Transformationsverhalten der Zustände $|\Phi_\pm\rangle$ unter der zyklischen Transformation $|123\rangle \to |312\rangle$, sowie unter der Vertauschung $|123\rangle \to |213\rangle$.